

EPIZYKLEN

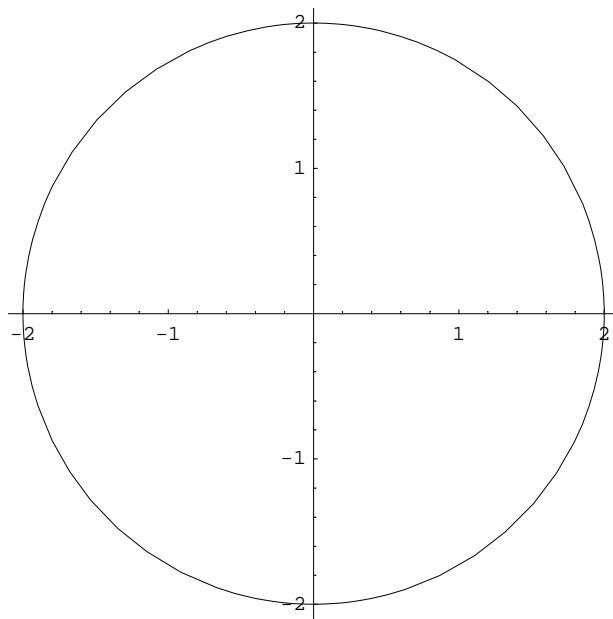
Nachfolgend sollen die grundlegenden Prinzipien deutlich gemacht werden, wie sich geozentrische Planetenbahnen nach der Epizyklentheorie modellieren lassen. Es handelt sich dabei um eine qualitativ orientierte Hinführung – auf die exakte Durchrechnung der aktuellen astronomischen Daten wird verzichtet. Sämtliche Berechnungen bzw. grafische Darstellungen wurden mit Mathematica 4.1 ausgeführt. Das entsprechende Notebook **Epizyken.nb** steht zum Download bereit.

Parametrische Kreise

Grundlegend ist die parametrische Darstellung des Kreises um den Ursprung mit dem Radius r :

```
r = 2  
ParametricPlot[r {Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

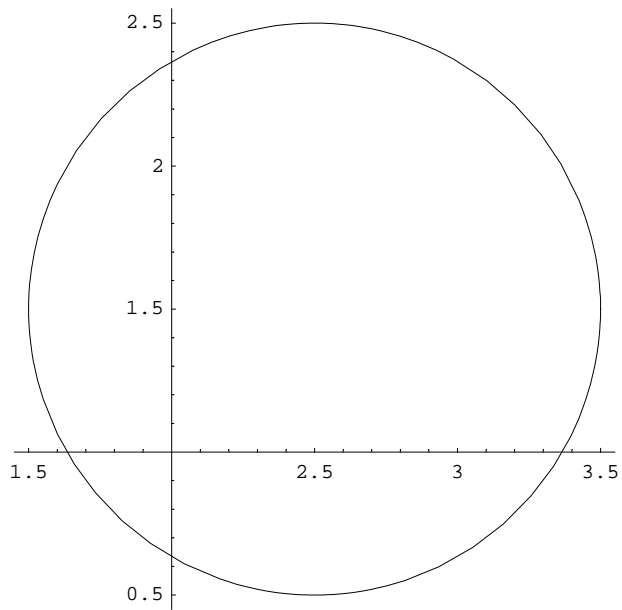
2



- Graphics -

Kreis mit Mittelpunkt (2.5, 1.5)

```
ParametricPlot[{2.5 + Cos[t], 1.5 + Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```



- Graphics -

Ellipsen:

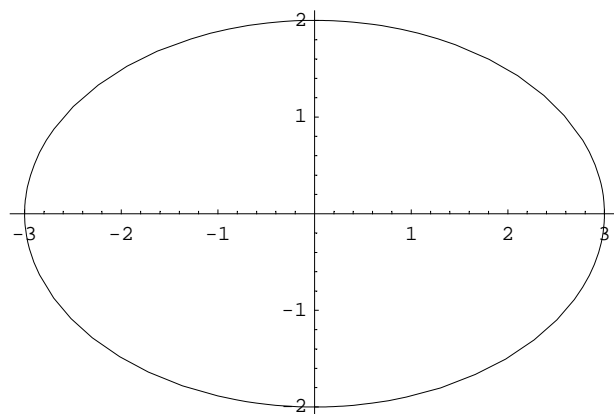
$a = 3$

$b = 2$

```
ParametricPlot[{a Cos[t], b Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

3

2



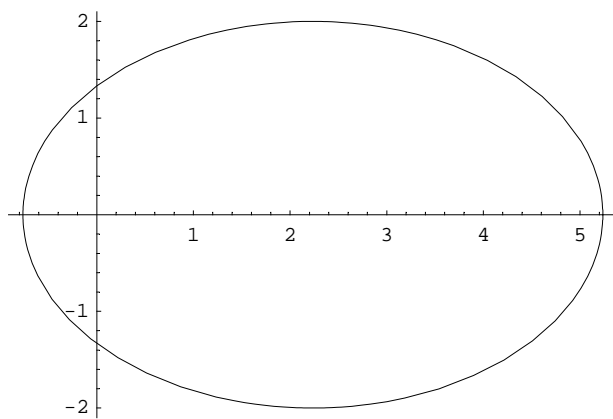
- Graphics -

Die Brennpunkte der Ellipse liegen bei $-f$ bzw. $+f$, wobei $f = \sqrt{a^2 - b^2}$:

```
a = 3  
b = 2  
ParametricPlot[{ $\sqrt{a^2 - b^2} + a \cos[t]$ , b Sin[t]},  
{t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

3

2



- Graphics -

Epizykloiden

Auf einem Kreis mit dem Radius R rollt außen ein anderer Kreis mit dem Radius r ab.

Von dessen Mittelpunkt befindet sich im Abstand a der Punkt P ,

dessen Bewegungsspur sich als Epizykloide abbildet. Man unterscheidet verkürzte ($a < r$),

verlängerte ($a > r$) und gemeine Epizykloide ($a = r$). Dreht sich der Radiusvektor $R + r$ um den Winkel φ ,

so dreht sich der äußere Kreis um den Winkel Ψ , wobei gilt :

$$\varphi R = \Psi r.$$

So entsteht stets eine geschlossene Kurve, oft allerdings erst nach mehreren Umläufen.

$$R = 4$$

$$r = 1$$

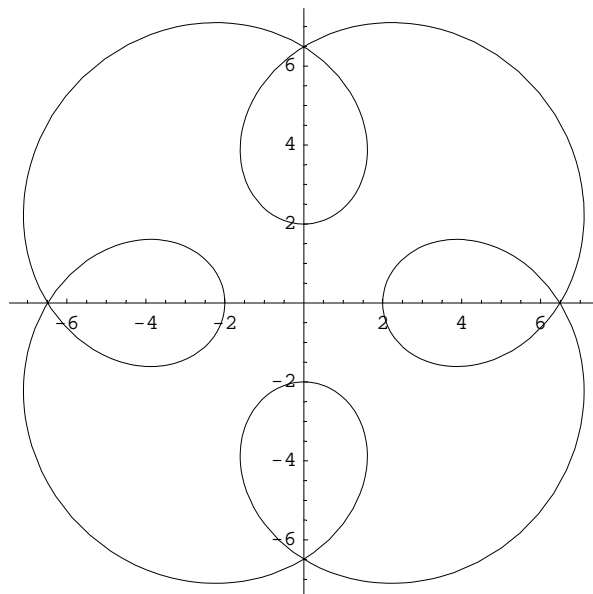
$$a = 3$$

```
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t (R + r) / r], (R + r) Sin[t] - a Sin[t (R + r) / r]},
  {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

4

1

3



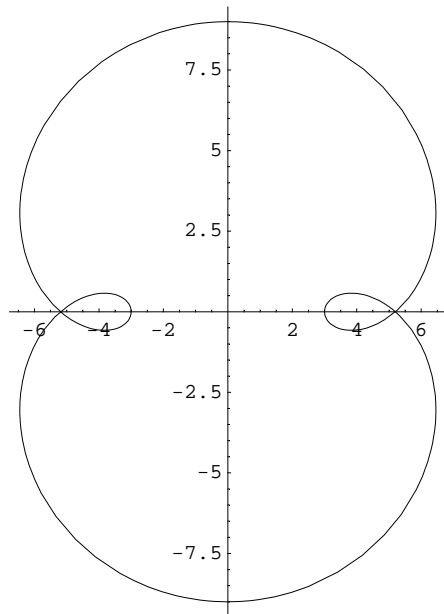
- Graphics -

```
R = 4
r = 2
a = 3
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t (R + r) / r], (R + r) Sin[t] - a Sin[t (R + r) / r]},
  {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

4

2

3



- Graphics -

Kardioide:

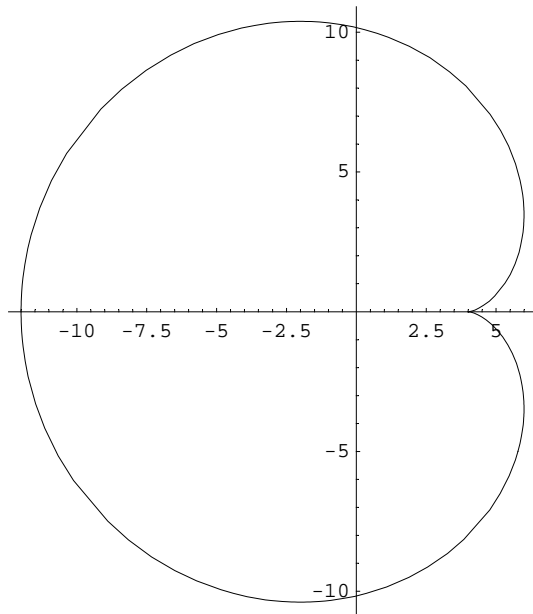
Für $a = r = R$ erhält man die Kardioide. Die Länge der Kurve $l = 8r$. Die Fläche $F = 6\pi r^2$.

```
R = 4  
r = 4  
a = 4  
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t (R + r) / r], (R + r) Sin[t] - a Sin[t (R + r) / r]},  
  {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

4

4

4



- Graphics -

Hypozykloiden

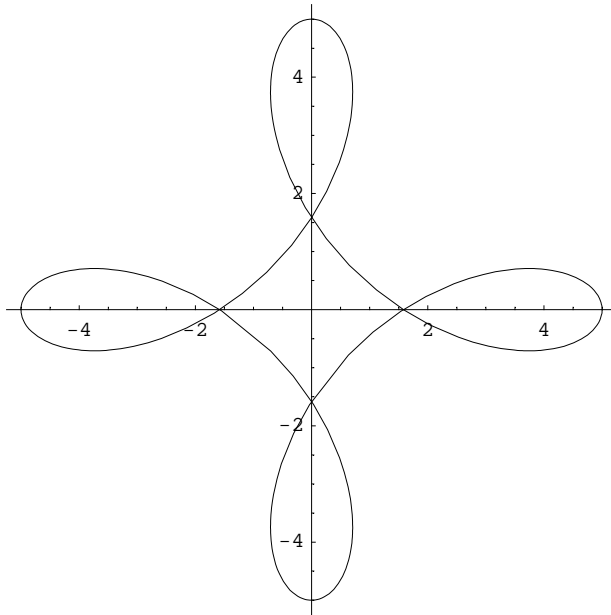
Sie entstehen, wenn der Kreis nicht außen, sondern innen abrollt, d.h. wenn formal $r < 0$ (und entsprechend $a < 0$):

```
R = 4  
r = -1  
a = -2  
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t (R + r) / r], (R + r) Sin[t] - a Sin[t (R + r) / r]},  
  {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

4

-1

-2



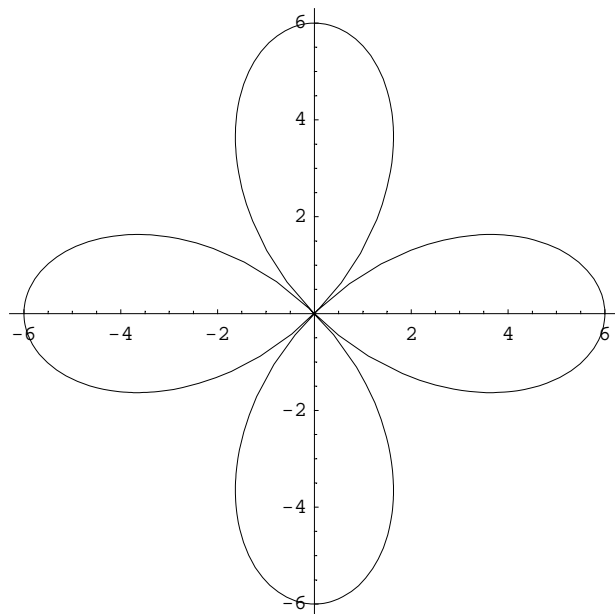
- Graphics -

```
R = 4  
r = -1  
a = -3  
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t (R + r) / r], (R + r) Sin[t] - a Sin[t (R + r) / r]},  
  {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

4

-1

-3



- Graphics -


```

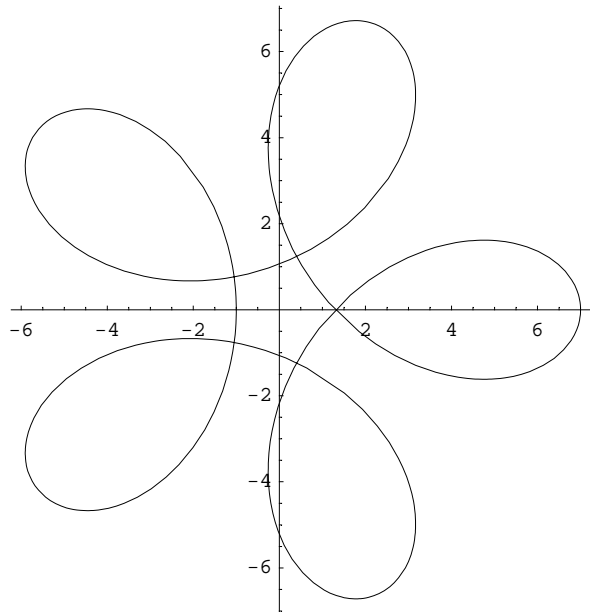
R = 5
r = -1
a = -3
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t (R + r) / r], (R + r) Sin[t] - a Sin[t (R + r) / r]},
  {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]

```

5

-1

-3



- Graphics -

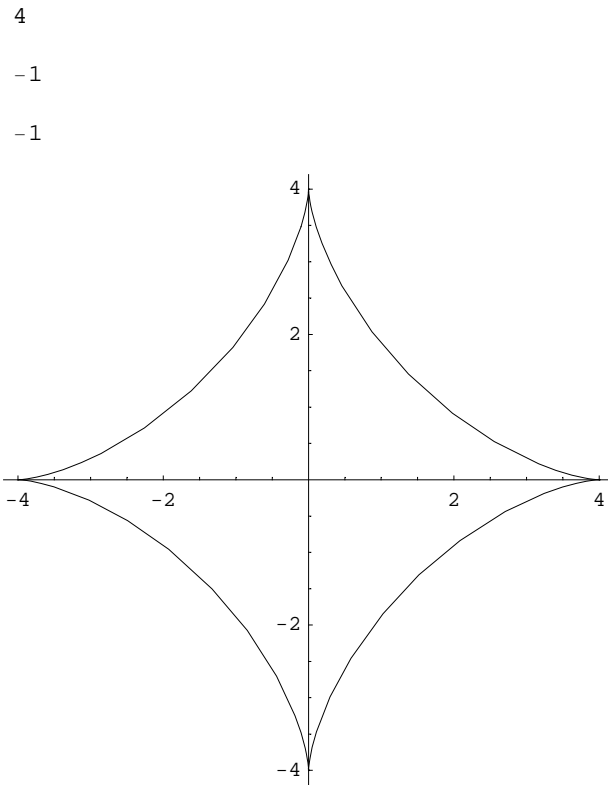
Für $-a < -r$ spricht man von einer verkürzten, für $-a > -r$ von einer verlängerten, für $a = r$ von einer gemeinen Hypozykloide.

Astroide:

Die reguläre Astroide oder Sternkurve ist eine gemeine Hypozykloide mit

$$4r = R:$$

```
R = 4  
r = -1  
a = -1  
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t (R + r) / r], (R + r) Sin[t] - a Sin[t (R + r) / r]},  
  {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```



- Graphics -

Offene Formen:

Die Bedingung $\varphi R = \Psi r$ ist dann nicht mehr erfüllt, außer $k = 1$:

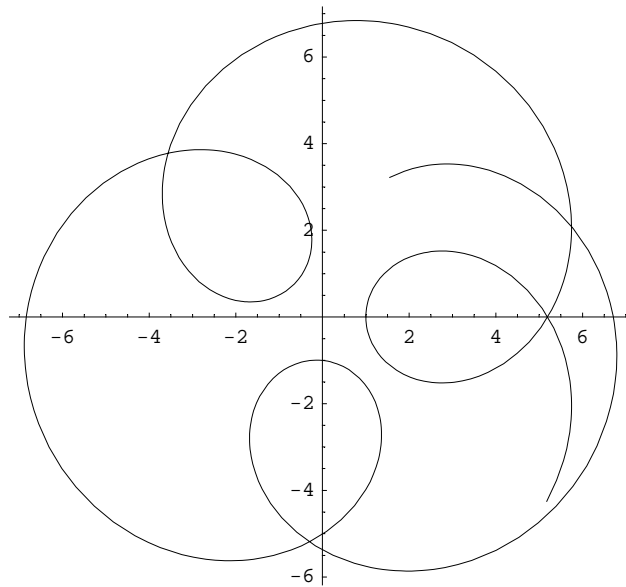
```
R = 3
r = 1
a = 3
k = 0.9
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t k R / r + t], (R + r) Sin[t] - a Sin[t k R / r + t]},
  {t, -0.3 Pi, 2.1 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

3

1

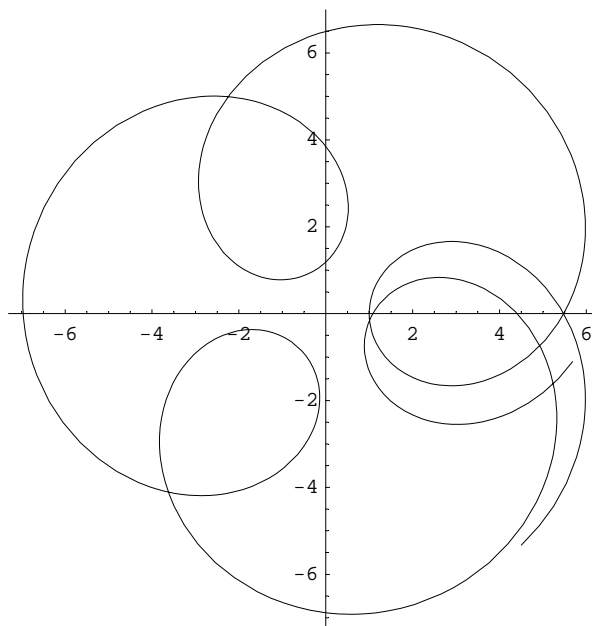
3

0.9



- Graphics -

```
R = 3
r = 1
a = 3
k = 1.05
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t k R / r + t], (R + r) Sin[t] - a Sin[t k R / r + t]},
  {t, -0.3 Pi, 2.1 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
3
1
3
1.05
```



- Graphics -

Allgemeinste Form:

Die Konstante b bestimmt die Symmetrie der Kurve.

Für $b = 3$ etwa ist sie exakt dreizählig, d.h. in sich geschlossen :

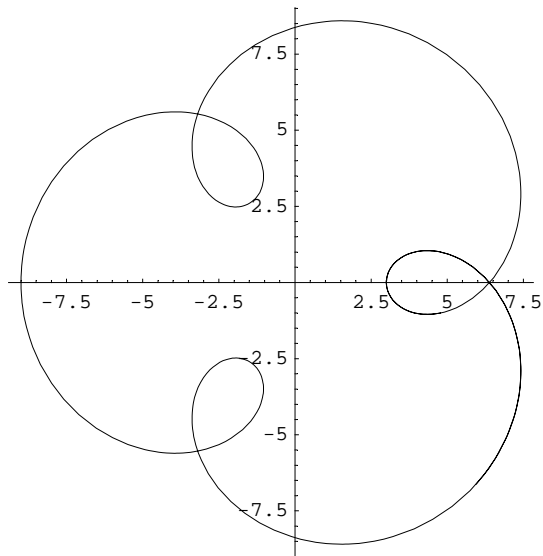
```
R = 5  
r = 1  
a = 3  
b = 3  
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t b + t], (R + r) Sin[t] - a Sin[t b + t]},  
  {t, -0.3 Pi, 2.1 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

5

1

3

3



- Graphics -

Bei nicht ganzzahligen Werten für b ist die Kurve nicht geschlossen:

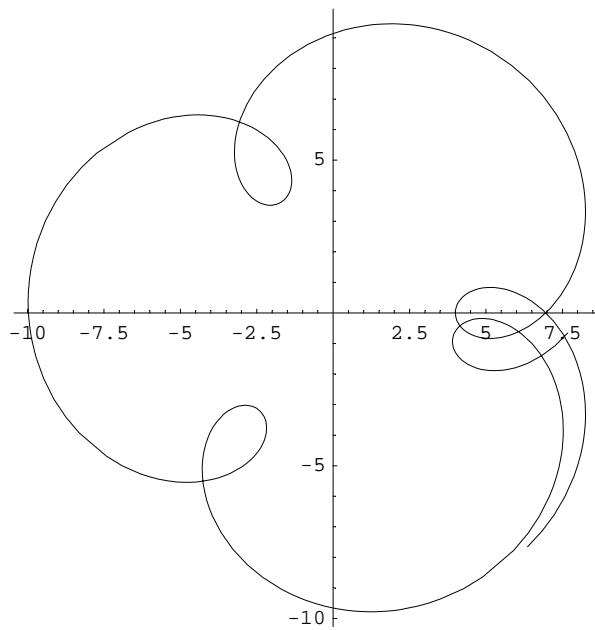
```
R = 6  
r = 1  
a = 3  
b = 3.1  
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t b + t], (R + r) Sin[t] - a Sin[t b + t]},  
  {t, -0.3 Pi, 2.1 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

6

1

3

3.1



- Graphics -

Elliptische offene Epizykloiden:

```
Ra = 6
Rb = 5
r = 1
a = 3
b = 3.1
ParametricPlot[{(Ra + r) Cos[t] - a Cos[t b + t], (Rb + r) Sin[t] - a Sin[t b + t]},
  {t, -0.3 Pi, 2.1 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

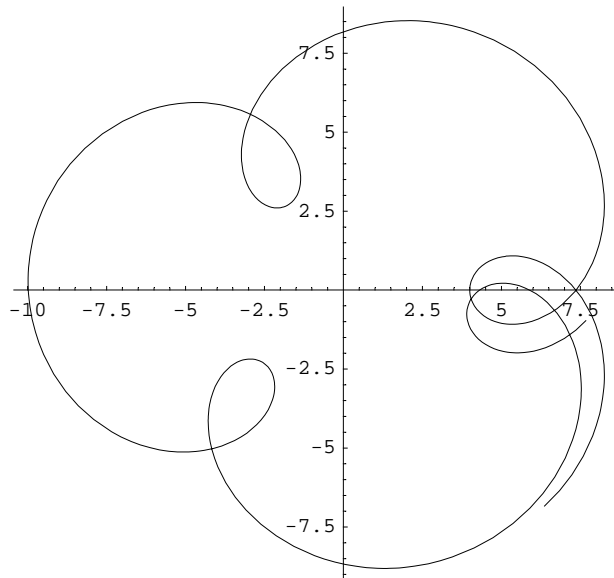
6

5

1

3

3.1



- Graphics -

```

Ra = 7
Rb = 5
r = 1
a = 3
b = 3
ParametricPlot[{(Ra + r) Cos[t] - a Cos[t b + t], (Rb + r) Sin[t] - a Sin[t b + t]},
  {t, -0.3 Pi, 2.1 Pi}, AspectRatio -> Automatic]

```

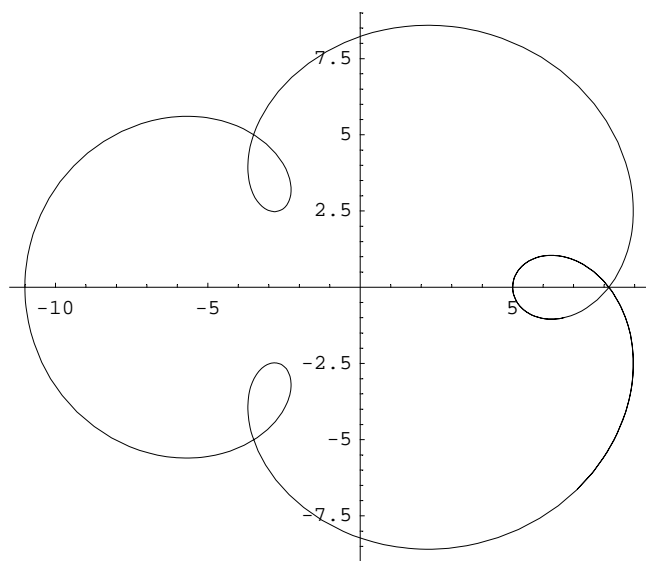
7

5

1

3

3



- Graphics -

Merkurbahn:

minimale Entfernung des Merkur von der Erde = 0.53 AE

maximale = 1.47 AE $\rightarrow r = 0$, da $1.47 - 1.00 = 1.00 - 0.53$, d.h. beinahe kreisförmige Bahn!

$a = 0.47$ AE $\left(= 1.00 - 0.53 = 1.47 - 1.00 = \frac{1.47 - 0.53}{2} \right)$

Synodische Umlaufzeit = 116 Tage $\rightarrow b = 365/116 = 3.15$

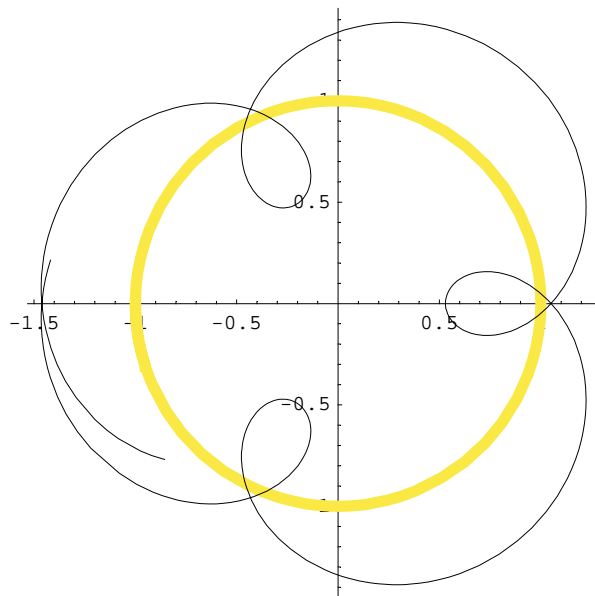

```
R = 1
r = 0
a = 0.47
b = 3.15
ParametricPlot[
  {{Cos[t], Sin[t]}, {(R+r) Cos[t] - a Cos[t b + t], (R+r) Sin[t] - a Sin[t b + t]}},
  {t, -Pi, 1.1 Pi}, AspectRatio -> Automatic,
  PlotStyle -> {{Thickness[0.02], RGBColor[0.98, 0.91, 0.27]}, {GrayLevel[0]}}
```

1

0

0.47

3.15

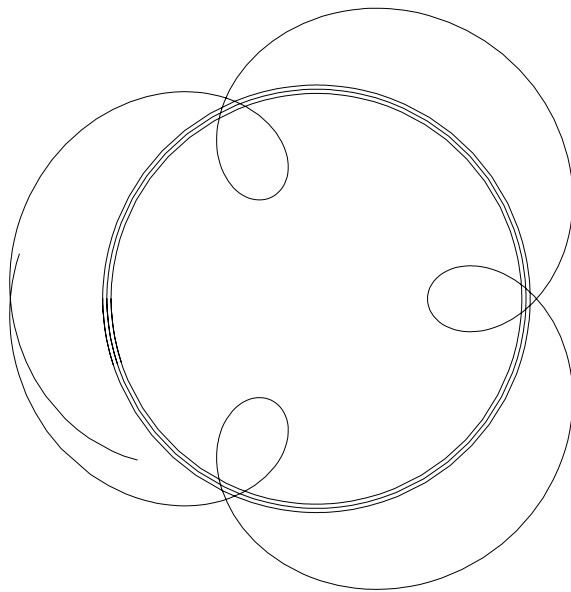


- Graphics -

```

R = 1
r = 0
a = 0.47
b = 3.15
ParametricPlot[{{(R + r) Cos[t] - a Cos[t b + t], (R + r) Sin[t] - a Sin[t b + t]},
  {Cos[t], Sin[t]}, {.98 Cos[t], .98 Sin[t]}, {1.02 Cos[t], 1.02 Sin[t]}},
  {t, -Pi, 1.1 Pi}, AspectRatio -> Automatic, Axes -> None]
1
0
0.47
3.15

```



- Graphics -

Venusbahn:

minimale Entfernung der Venus von der Erde = 0.27 AE

maximale = 1.73 AE \rightarrow $r = 0$ (näherungsweise kreisförmig)

$$a = 0.73 \text{ AE} \left(= 1.73 - 1.00 = \frac{1.73 - 0.27}{2} \right)$$

Synodische Umlaufzeit = 584 Tage \rightarrow $b = 365/584 = 0.625$

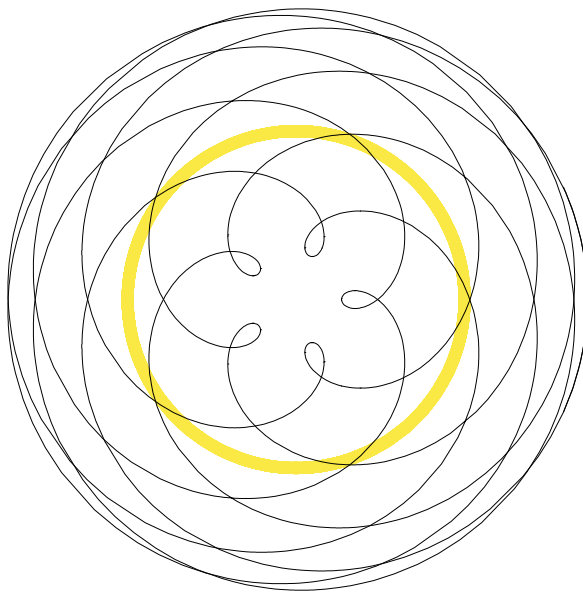
Das Venuspentagramm entsteht in 8 Jahren :

$$(8 * 365 = 2920 = 5 * 584)$$

```

R = 1
r = 0
a = 0.73
b = 0.625
ParametricPlot[
  {{Cos[t], Sin[t]}, {(R+r) Cos[t] - a Cos[t b + t], (R+r) Sin[t] - a Sin[t b + t]}},
  {t, -8.1 Pi, 8.1 Pi}, AspectRatio -> Automatic, Axes -> None, PlotDivision -> 1000,
  PlotStyle -> {{Thickness[0.02], RGBColor[0.98, 0.91, 0.27]}, {GrayLevel[0]}}]
1
0
0.73
0.625

```



- Graphics -

Marsbahn:

minimale Entfernung = 0.38 AE

maximale Entfernung = 2.67 AE

mittlere Entfernung = 1.52 AE

$$a = \frac{2.67 - 0.38}{2} = 1.145$$

$$r = 2.67 - 1.00 - 1.145 = 0.38 - 1.00 + 1.145 = 0.525$$

Synodische Umlaufzeit = 780 Tage ($b = 365/780 = 0.46795$)

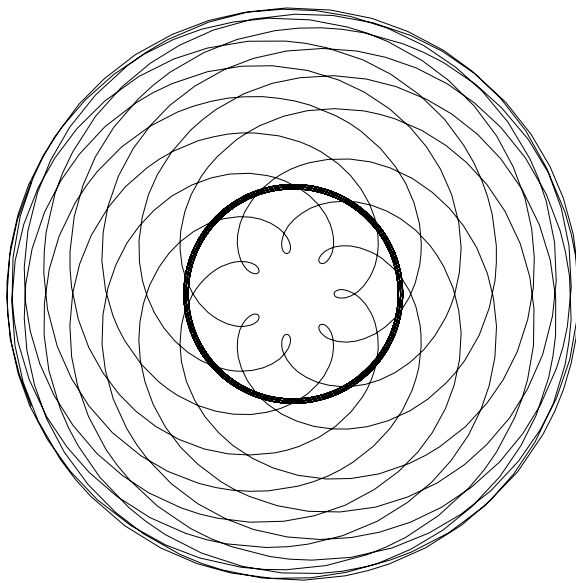
in 15 Jahren entsteht ein stark verzerrtes 7 – Eck

$$(15 * 365 = 5475; 7 * 780 = 5460)$$

```

R = 1
r = 0.525
a = 1.145
b = 0.46795
ParametricPlot[{{(R+r) Cos[t] - a Cos[t b + t], (R+r) Sin[t] - a Sin[t b + t]},
  {Cos[t], Sin[t]}, {.98 Cos[t], .98 Sin[t]}, {1.02 Cos[t], 1.02 Sin[t]}},
  {t, -15.1 Pi, 15.1 Pi}, AspectRatio -> Automatic, Axes -> None]
1
0.525
1.145
0.46795

```



- Graphics -

Jupiterbahn:

```

Minimale Entfernung = 3.95 AE
Maximale Entfernung = 6.45 AE
mittlere Entfernung = 5.20 AE
Synodische Umlaufzeit = 399 Tage (b = 365 / 399 = 0.9148)
(12 * 365 = 4389; 11 * 399 = 4380)

```

Blütenformen:

Basierend auf Hypozykloiden, die in gewissem Sinn das Inverse der Epizykloiden darstellen, durch die sich die geozentrischen Planetenbahnen charakterisieren lassen.

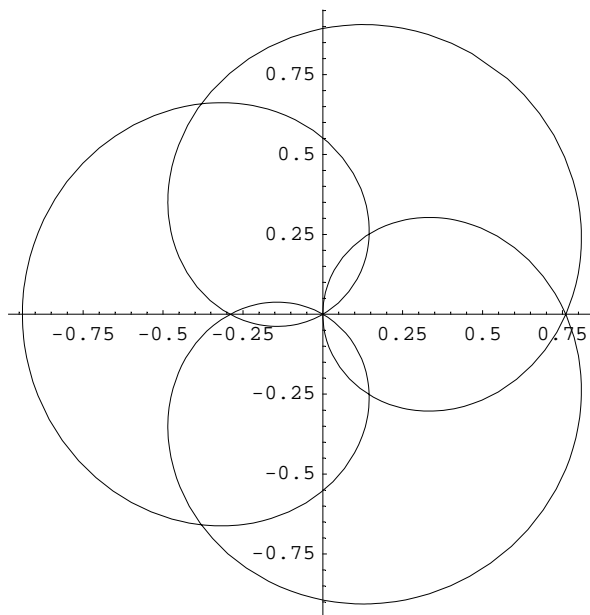
```
R = 1  
r = -0.53  
a = 0.47  
b = 3  
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t b + t], (R + r) Sin[t] - a Sin[t b + t]},  
  {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

1

-0.53

0.47

3



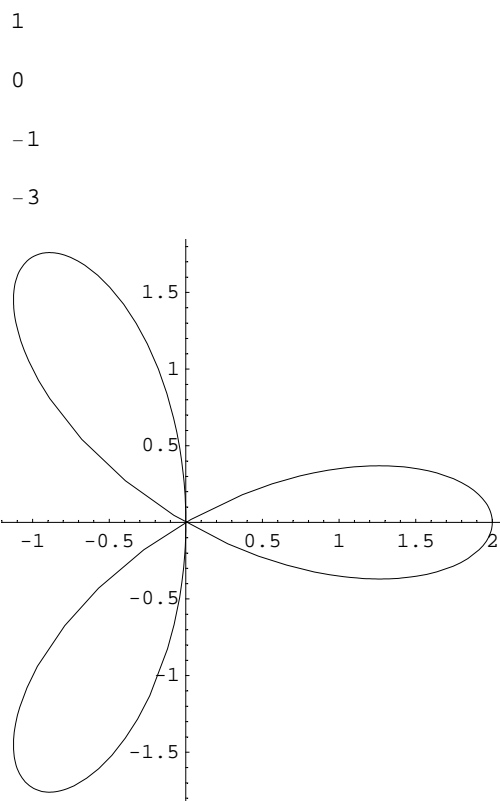
- Graphics -

Dreizählige Blüte:

```

R = 1
r = 0
a = -1
b = -3
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t (b + 1)], (R + r) Sin[t] - a Sin[t (b + 1)]},
  {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]

```



- Graphics -

Ähnliche Blütenformen lassen sich auch durch ein ganz anderes Konzept verwirklichen, das von den Polarkoordinaten abgeleitet ist. Die Funktion $k(r, \varphi)$ beschreibt für $r = \text{const.}$ einen Kreis. Wird für r aber eine variable zyklische Funktion, etwa $\text{Sin}[m\varphi]$ gewählt, so entstehen die blütenähnlichen Schleifenformen, wobei sich grundsätzlich $2m$ Schleifen bilden, die aber bei ungeradzahligem m so übereinanderfallen, daß nur m Schleifen sichtbar unterschieden werden können. Die Polarkoordinaten lassen sich in rechtwinkelige Koordinaten umrechnen:

$$\begin{aligned}
 x &= r \text{Cos}(t) \\
 y &= r \text{Sin}(t)
 \end{aligned}$$

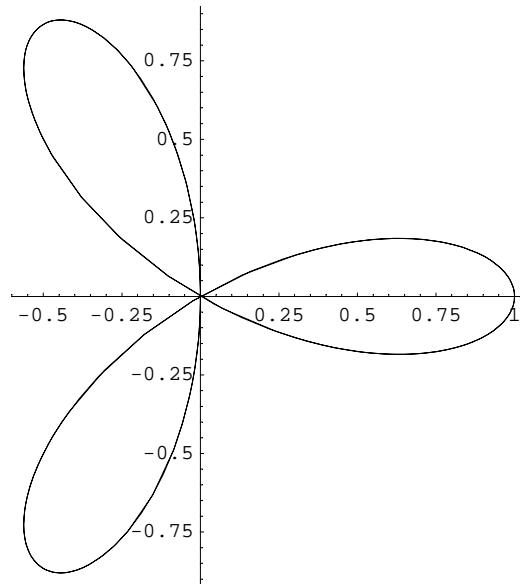
Dadurch ergeben sich dann für rechtwinkelige Koordinaten folgende Formel:

```
R = 1  
r = 0
```

```
ParametricPlot[{{(R + r) Cos[3 t]) Cos[t], (R + r) Cos[3 t]) Sin[t]},  
{t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

```
1
```

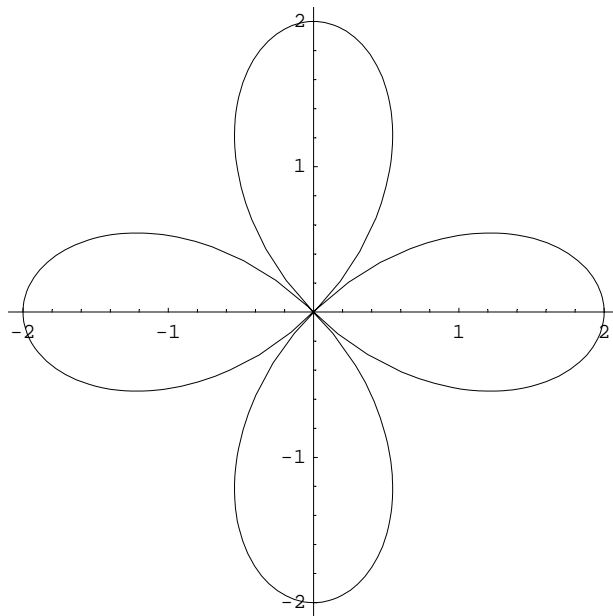
```
0
```



```
- Graphics -
```

Vierzählige Blüte:

```
R = 1
r = 0
a = -1
b = -4
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t (b + 1)], (R + r) Sin[t] - a Sin[t (b + 1)]},
  {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
1
0
-1
-4
```



- Graphics -

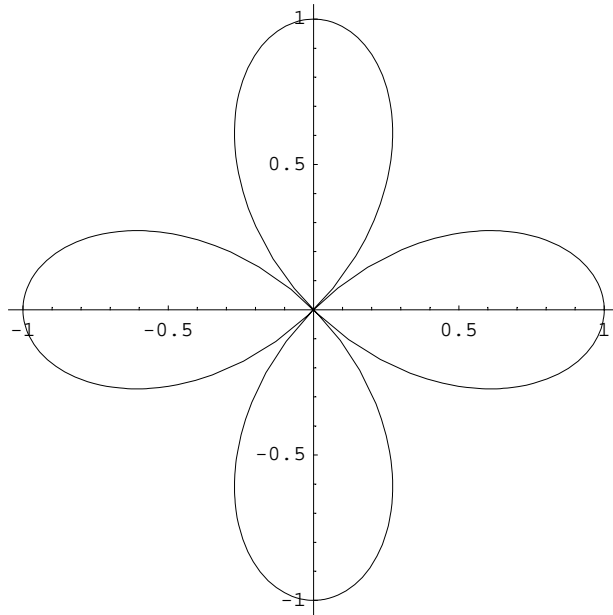
oder nach der alternativen Polarkoordinaten-Methode:


```
R = 1  
r = 0  
b = 2  
ParametricPlot[{{(R + r) Cos[b t]} Cos[t], (R + r) Cos[b t]} Sin[t]},  
{t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

1

0

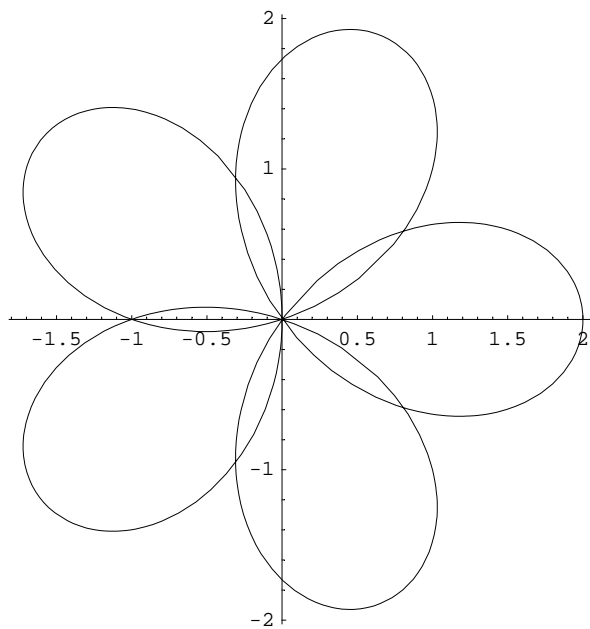
2



- Graphics -

Fünzfählige Blüte:

```
R = 1
r = 0
a = -1
b = -5
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t (b + 1)], (R + r) Sin[t] - a Sin[t (b + 1)]},
  {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
1
0
-1
-5
```



- Graphics -

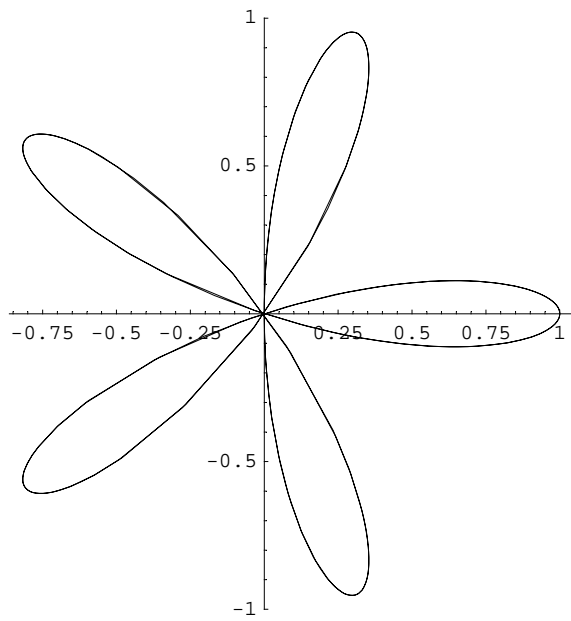
alternative Methode:

```
R = 1  
r = 0  
b = 5  
ParametricPlot[{(R + r) Cos[b t] Cos[t], (R + r) Cos[b t] Sin[t]},  
  {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

1

0

5



- Graphics -

Sechszählige Blüte:

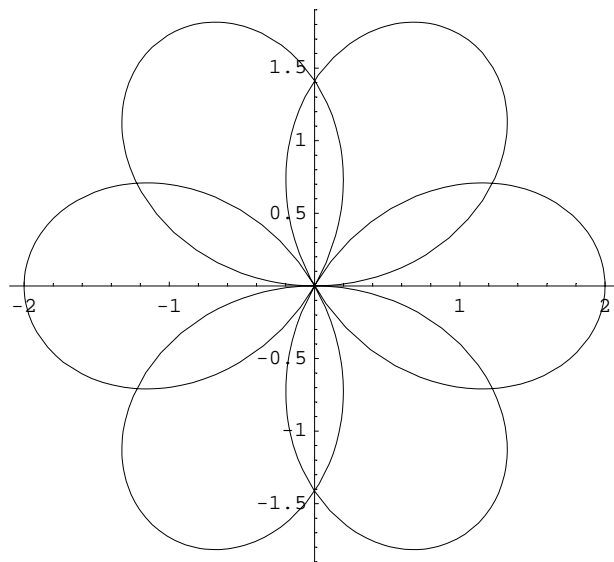
```
R = 1  
r = 0  
a = -1  
b = -6  
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t (b + 1)], (R + r) Sin[t] - a Sin[t (b + 1)]},  
  {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

1

0

-1

-6



- Graphics -

Sechszählig kardioidartig verwachsen:

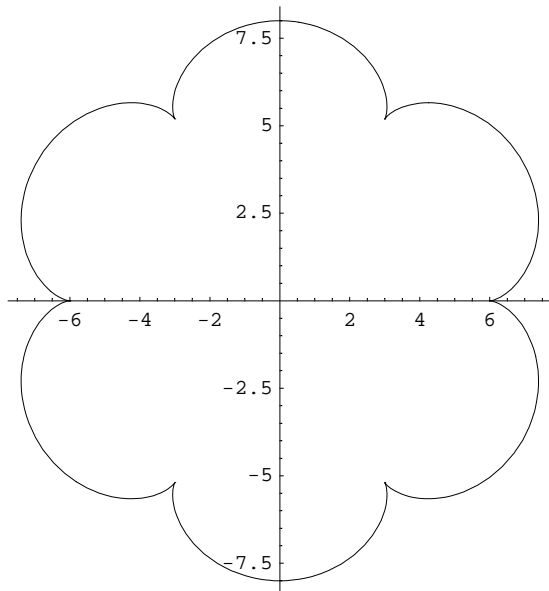
```
R = 1  
r = 6  
a = 1  
b = 6  
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t (b + 1)], (R + r) Sin[t] - a Sin[t (b + 1)]},  
  {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

1

6

1

6



- Graphics -

reine Kardioide:

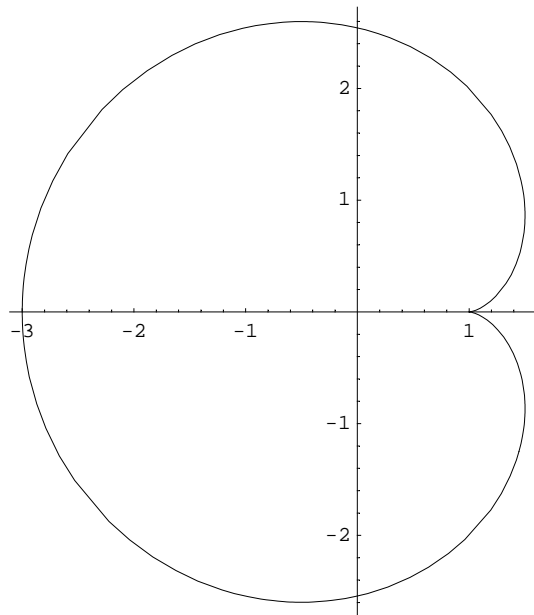
```
R = 1  
r = 1  
a = 1  
b = 1  
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t (b + 1)], (R + r) Sin[t] - a Sin[t (b + 1)]},  
  {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

1

1

1

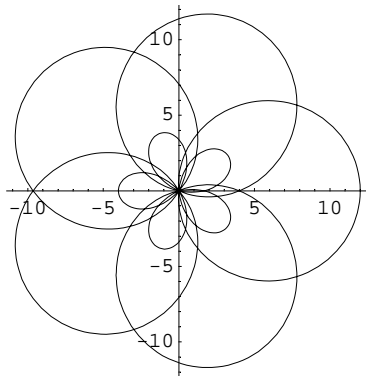
1



- Graphics -

```
R = 4
r = 0
a = -4
b = -5
c = -4
d = -10
ParametricPlot[{(R + r) Cos[t] - a Cos[t (b + 1)] - c Cos[t (d + 1)],
  (R + r) Sin[t] - a Sin[t (b + 1)] - c Sin[t (d + 1)]},
  {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

```
4
0
-4
-5
-4
-10
```



- Graphics -

komplexere Epizykeln:

Mehrere Epizykeln werden übereinandergetürmt, um eine realistischere Bahnkurve zu erhalten.

Nach Muster der **Mercurbahn:**

```
R = 1
r = 0
r1 = 0.1
a = 0.47
b = 3.15
a1 = 0.3
b1 = 3.9
ParametricPlot[{{(R+r+r1) Cos[t] - a Cos[t b+t] - a1 Cos[t (b1 + 1)]},
  (R+r+r1) Sin[t] - a Sin[t b+t] - a1 Sin[t (b1 + 1)]},
  {Cos[t], Sin[t]}, {t, -Pi, 1.1 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

1

0

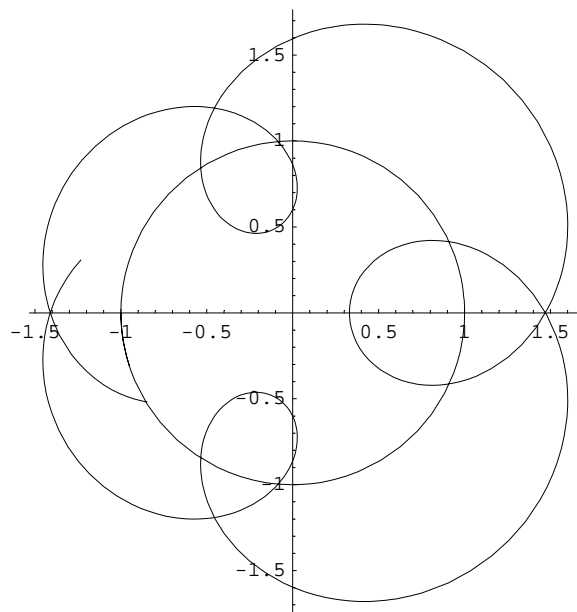
0.1

0.47

3.15

0.3

3.9

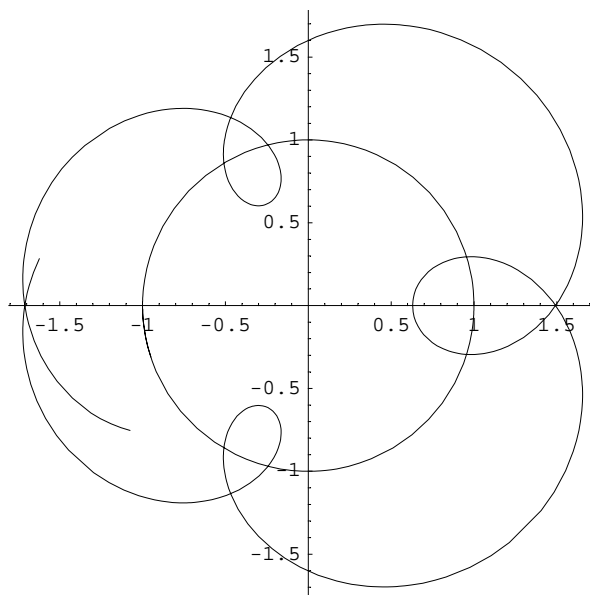


- Graphics -


```

R = 1
r = 0
r1 = 0.2
r2 = 0.1
a = 0.47
b = 3.15
a1 = 0.1
b1 = 4.1
a2 = 0.1
b2 = 3.5
ParametricPlot[
  {{(R+r+r1+r2) Cos[t] - a Cos[t b+t] - a1 Cos[t (b1+1)] - a2 Cos[t (b2+1)]},
   (R+r+r1) Sin[t] - a Sin[t b+t] - a1 Sin[t (b1+1)] - a2 Sin[t (b2+1)]},
  {Cos[t], Sin[t]}, {t, -Pi, 1.1 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
1
0
0.2
0.1
0.47
3.15
0.1
4.1
0.1
3.5

```



- Graphics -

Nach Muster der **Marsbahn**:

```
R = 1
r = 0.525
r1 = 0.1
a = 1.145
b = 0.46795
a1 = 0.1
b1 = 0.5
ParametricPlot[{{(R+r+r1) Cos[t] - a Cos[t b+t] - a1 Cos[t (b1 + 1)]},
  (R+r+r1) Sin[t] - a Sin[t b+t] - a1 Sin[t (b1 + 1)]}, {Cos[t], Sin[t]}},
  {t, -15.1 Pi, 15.1 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

1

0.525

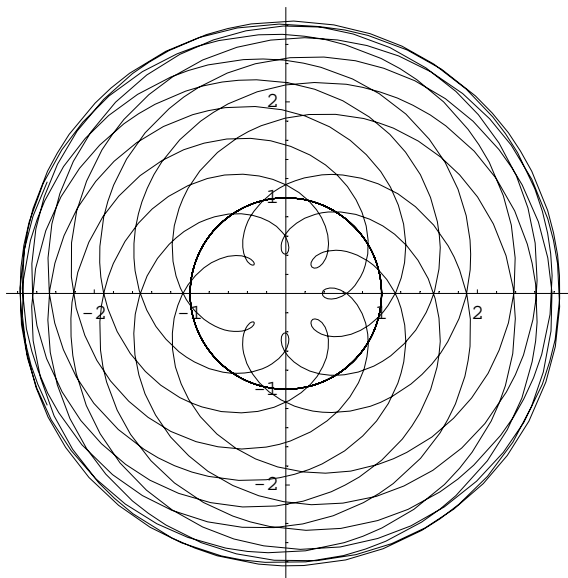
0.1

1.145

0.46795

0.1

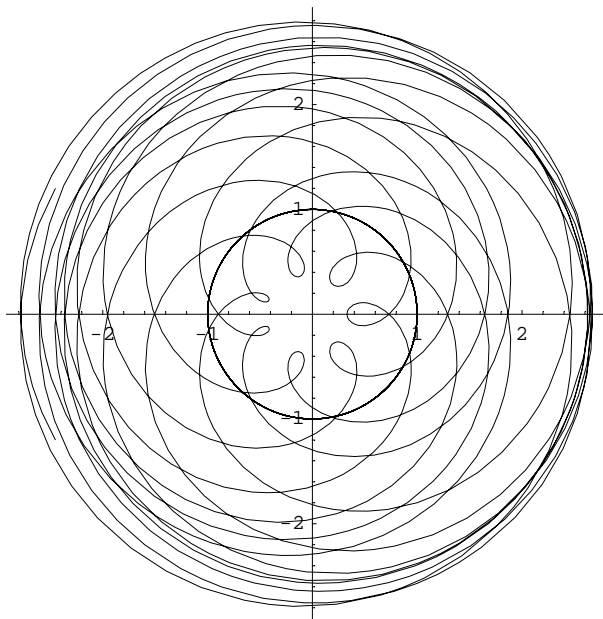
0.5



- Graphics -

```
R = 1
r = 0.525
r1 = 0.1
a = 1.145
b = 0.46795
a1 = 0.15
b1 = 0.9
ParametricPlot[{{(R+r+r1) Cos[t] - a Cos[t b+t] - a1 Cos[t (b1+1)],
  (R+r+r1) Sin[t] - a Sin[t b+t] - a1 Sin[t (b1+1)]}, {Cos[t], Sin[t]}},
  {t, -15.1 Pi, 15.1 Pi}, AspectRatio -> Automatic]

1
0.525
0.1
1.145
0.46795
0.15
0.9
```



- Graphics -

Ephemeridentabelle:

Versuch für die **Marsbahn**:

```

R = 1
r = 0.525
r1 = 0.1
a = 1.145
b = 0.46795
a1 = 0.15
b1 = 0.9
x[t_] := (R+r+r1) Cos[t] - a Cos[t b+t] - a1 Cos[t (b1 + 1)]
y[t_] := (R+r+r1) Sin[t] - a Sin[t b+t] - a1 Sin[t (b1 + 1)]
Distanz[t_] :=  $\sqrt{x[t]^2 + y[t]^2}$ 
Winkel[t_] := N[ArcSin[(y[t]/Distanz[t])] 180/Pi]

Print["_____"]
Print["Sonne    Mars        Distanz(Erde-Mars)"]
Print["_____"]
Do[
  If[(Winkel[t] > 0) ^ (x[t] > 0), Print[PaddedForm[Mod[t 180/Pi, 360], 4], " ",
    PaddedForm[Winkel[t], {5, 2}], " ", PaddedForm[Distanz[t], {5, 2}]],

  If[(Winkel[t] > 0) ^ (x[t] < 0),
    Print[PaddedForm[Mod[t 180/Pi, 360], 4], " ",
    PaddedForm[Winkel[t] + 90, {5, 2}], " ", PaddedForm[Distanz[t], {5, 2}]],

  If[(Winkel[t] < 0) ^ (x[t] > 0),
    Print[PaddedForm[Mod[t 180/Pi, 360], 4], " ",
    PaddedForm[360 + Winkel[t], {5, 2}], " ", PaddedForm[Distanz[t], {5, 2}]],

  If[(Winkel[t] < 0) ^ (x[t] < 0),
    Print[PaddedForm[Mod[t 180/Pi, 360], 4], " ",
    PaddedForm[180 - Winkel[t], {5, 2}], " ", PaddedForm[Distanz[t], {5, 2}]],
  ]]]],
  {t, -16 Pi, 16 Pi, Pi/6}]
ParametricPlot[{{(R+r+r1) Cos[t] - a Cos[t b+t] - a1 Cos[t (b1 + 1)],
  (R+r+r1) Sin[t] - a Sin[t b+t] - a1 Sin[t (b1 + 1)]}, {Cos[t], Sin[t]}},
  {t, -15.1 Pi, 15.1 Pi}, AspectRatio -> Automatic, Axes -> None]

1
0.525
0.1
1.145
0.46795
0.15
0.9

_____

Sonne    Mars        Distanz(Erde-Mars)

_____

0    328.35    1.91

```

30	1.67	2.09
60	35.45	2.27
90	69.73	2.43
120	165.49	2.57
150	130.23	2.69
180	94.53	2.78
210	211.55	2.82
240	247.94	2.81
270	284.54	2.76
300	321.24	2.64
330	357.94	2.47
0	34.45	2.25
30	70.57	1.98
60	164.08	1.68
90	130.19	1.35
120	99.24	1.01
150	194.85	0.69
180	202.11	0.47
210	194.24	0.47
240	204.16	0.69
270	228.59	0.95
300	258.55	1.21
330	290.69	1.45
0	323.76	1.66
30	357.23	1.85
60	30.89	2.03
90	64.70	2.18
120	171.31	2.33
150	137.09	2.45
180	102.55	2.57
210	202.35	2.66
240	237.65	2.73
270	273.31	2.76
300	309.32	2.74
330	345.60	2.69

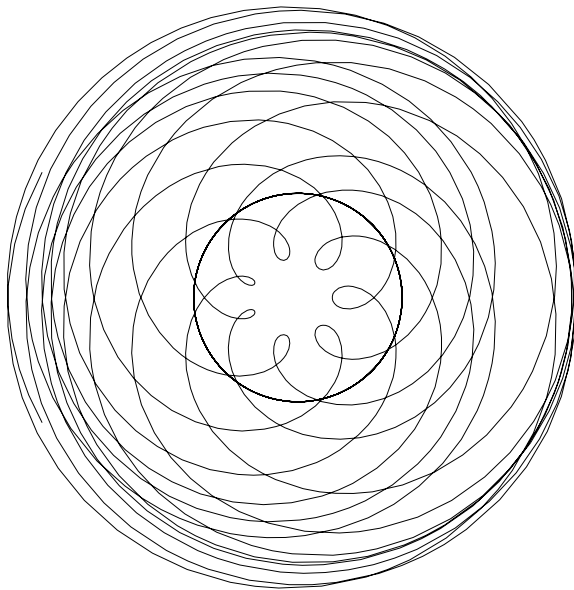
0	22.07	2.58
30	58.62	2.41
60	174.90	2.20
90	138.71	1.93
120	103.16	1.63
150	201.06	1.30
180	232.33	0.95
210	255.77	0.62
240	256.40	0.39
270	242.68	0.47
300	256.72	0.74
330	284.26	1.04
0	316.20	1.32
30	349.81	1.58
60	24.07	1.80
90	58.53	1.99
120	177.00	2.15
150	142.59	2.29
180	108.24	2.40
210	196.13	2.50
240	230.60	2.57
270	265.26	2.64
300	300.19	2.67
330	335.43	2.69
0	10.99	2.66
30	46.85	2.60
60	82.95	2.49
90	150.80	2.33
120	114.54	2.13
150	191.54	1.87
180	227.07	1.57
210	261.35	1.25
240	292.65	0.90
270	315.18	0.56
300	308.89	0.35

330	293.62	0.48
0	311.61	0.79
30	341.23	1.12
60	14.48	1.42
90	49.09	1.69
120	84.22	1.92
150	150.52	2.12
180	115.32	2.27
210	189.71	2.39
240	224.55	2.48
270	259.23	2.55
300	293.81	2.60
330	328.40	2.62
0	3.07	2.63
30	37.93	2.61
60	73.03	2.57
90	161.61	2.50
120	126.00	2.39
150	90.20	2.23
180	215.66	2.03
210	251.38	1.79
240	286.62	1.50
270	320.61	1.19
300	351.43	0.84
330	12.26	0.51
30	347.74	0.51
60	8.57	0.84
90	39.39	1.19
120	73.38	1.50
150	161.38	1.79
180	125.66	2.03
210	180.20	2.23
240	216.00	2.39
270	251.61	2.50
300	286.97	2.57

330	322.07	2.61
0	356.93	2.63
30	31.60	2.62
60	66.19	2.60
90	169.23	2.55
120	134.55	2.48
150	99.71	2.39
180	205.32	2.27
210	240.52	2.12
240	275.78	1.92
270	310.91	1.69
300	345.52	1.42
330	18.77	1.12
0	48.39	0.79
30	66.38	0.48
60	51.11	0.35
90	44.82	0.56
120	67.35	0.90
150	171.35	1.25
180	137.07	1.57
210	101.54	1.87
240	204.54	2.13
270	240.80	2.33
300	277.05	2.49
330	313.15	2.60
0	349.01	2.66
30	24.57	2.69
60	59.81	2.67
90	175.26	2.64
120	140.60	2.57
150	106.13	2.50
180	198.24	2.40
210	232.59	2.29
240	267.00	2.15
270	301.47	1.99

300	335.93	1.80
330	10.19	1.58
0	43.80	1.32
30	75.74	1.04
60	166.72	0.74
90	152.68	0.47
120	166.40	0.39
150	165.77	0.62
180	142.33	0.95
210	111.06	1.30
240	193.16	1.63
270	228.71	1.93
300	264.90	2.20
330	301.38	2.41
0	337.93	2.58
30	14.40	2.69
60	50.68	2.74
90	86.69	2.76
120	147.65	2.73
150	112.35	2.66
180	192.55	2.57
210	227.09	2.45
240	261.31	2.33
270	295.30	2.18
300	329.11	2.03
330	2.77	1.85
0	36.24	1.66
30	69.31	1.45
60	168.55	1.21
90	138.59	0.95
120	114.16	0.69
150	104.24	0.47
180	112.11	0.47
210	104.85	0.69
240	189.24	1.01

270	220.19	1.35
300	254.08	1.68
330	289.43	1.98
0	325.55	2.25
30	2.06	2.47
60	38.76	2.64
90	75.46	2.76
120	157.94	2.81
150	121.55	2.82
180	184.53	2.78
210	220.23	2.69
240	255.49	2.57
270	290.27	2.43
300	324.55	2.27
330	358.33	2.09
0	31.65	1.91



- Graphics -

Versuch für die **Merkurbahn**:

Die Korrekturwerte r_1 , a_1 , b_1 wurden der Venusbahn entnommen, wobei $a_1 = \frac{a}{10}$ der Venusdaten. Insbesondere der b -Wert scheint dabei bedeutend, da dadurch der Venusrhythmus sich auf den Merkurhythmus abbildet. Der a_1 -Wert hingegen gibt nur die Stärke der Kopplung beider Bahnen an. Damit die maximale und minimale Entfernung des Merkur von der Erde nach wie vor den Tatsachen entspricht, muß a entsprechend korrigiert werden: $a_{\text{alt}} = a_{\text{neu}} + a_1$ ($0.47 = 0.397 + 0.073$)

```

R = 1
r = 0
r1 = 0
a = 0.397
b = 3.15
a1 = 0.073
b1 = 0.625
x[t_] := (R+r+r1) Cos[t] - a Cos[t b+t] - a1 Cos[t (b1 + 1)]
y[t_] := (R+r+r1) Sin[t] - a Sin[t b+t] - a1 Sin[t (b1 + 1)]
Distanz[t_] :=  $\sqrt{x[t]^2 + y[t]^2}$ 
Winkel[t_] := N[ArcSin[(y[t]/Distanz[t])] 180/Pi]

Print["_____"]
Print["Sonne   Merkur   Distanz(Erde-Merkur)"]
Print["_____"]
Do[
  If[(Winkel[t] > 0) ^ (x[t] > 0), Print[PaddedForm[Mod[t 180/Pi, 360], 4], " ",
    PaddedForm[Winkel[t], {5, 2}], " ", PaddedForm[Distanz[t], {5, 2}]],

  If[(Winkel[t] > 0) ^ (x[t] < 0),
    Print[PaddedForm[Mod[t 180/Pi, 360], 4], " ",
    PaddedForm[Winkel[t] + 90, {5, 2}], " ", PaddedForm[Distanz[t], {5, 2}]],

  If[(Winkel[t] < 0) ^ (x[t] > 0),
    Print[PaddedForm[Mod[t 180/Pi, 360], 4], " ",
    PaddedForm[360 + Winkel[t], {5, 2}], " ", PaddedForm[Distanz[t], {5, 2}]],

  If[(Winkel[t] < 0) ^ (x[t] < 0),
    Print[PaddedForm[Mod[t 180/Pi, 360], 4], " ",
    PaddedForm[180 - Winkel[t], {5, 2}], " ", PaddedForm[Distanz[t], {5, 2}]],
    ]]]],
  {t, 0, 2 Pi, Pi/18}]
ParametricPlot[{{(R+r+r1) Cos[t] - a Cos[t b+t] - a1 Cos[t (b1 + 1)],
  (R+r+r1) Sin[t] - a Sin[t b+t] - a1 Sin[t (b1 + 1)]}, {Cos[t], Sin[t]}},
  {t, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> Automatic, Axes -> None]

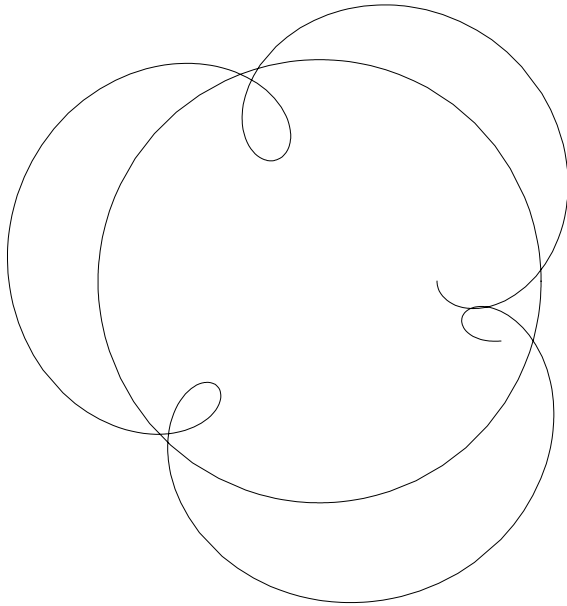
1
0
0
0.397
3.15
0.073
0.625

_____
Sonne   Merkur   Distanz(Erde-Merkur)
_____

10   349.91   0.63

```

20	353.72	0.83
30	6.45	1.05
40	23.22	1.22
50	41.72	1.32
60	60.76	1.33
70	79.42	1.27
80	173.35	1.12
90	159.43	0.93
100	152.51	0.72
110	157.60	0.59
120	167.75	0.63
130	167.10	0.82
140	156.45	1.04
150	140.81	1.24
160	122.89	1.37
170	104.09	1.42
180	184.67	1.39
190	202.46	1.27
200	217.93	1.10
210	228.64	0.89
220	230.59	0.71
230	223.61	0.67
240	220.02	0.79
250	226.59	1.00
260	239.90	1.21
270	256.62	1.37
280	274.92	1.46
290	293.70	1.46
300	312.11	1.38
310	329.12	1.23
320	343.05	1.03
330	350.80	0.82
340	348.61	0.68
350	341.25	0.70
0	341.77	0.86



- Graphics -

Umlaufbahn nach Tycho de Brahe:

Die Sonne umläuft die Erde, ebenso der Mond und die inneren Planeten, während die äußeren Planeten die die Erde umlaufende Sonne umkreisen.

Beispiel Marsbahn:

$U_{\text{siderisch}} = 686.98$ Tage

minimale Entfernung von der Sonne = 1.38 AE

maximale Entfernung von der Sonne = 1.67 AE

damit ergibt sich für die große Halbachse der stark exzentrischen Marsbahn:

$$a = \frac{1.67-1.38}{2} = 1.525 \text{ AE}$$

$$f = 1.525-1.38 = 1.67 - 1.525 = 0.145 \text{ AE und damit die kleine Halbachse}$$

$$b = \sqrt{a^2 - f^2} = 1.51809 \approx 1.518$$

$$m = \frac{U_{\text{siderisch}}}{365.25} = \frac{686.98}{365.25}$$

$$U_{\text{syn}} = 780 \text{ Tage (15*365=5475; 7*780=5460), d.h. etwa 7 bis 8 Schleifen in 15 Jahren.}$$

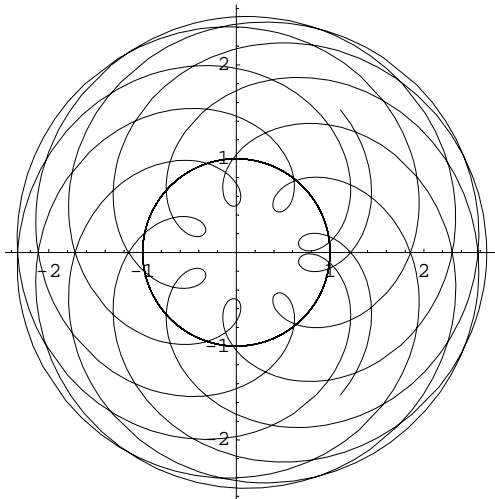
Für den angestrebten qualitativen Vergleich der geozentrischen Planetenbahnen mit den Blütenformen bzw. Blattstellungen ist diese Genauigkeit, die weder "Obertöne" noch kurzperiodische Störungen durch die anderen Planeten berücksichtigt, völlig hinreichend.

```
a = 1.525
b = 1.518
m = 686.98 / 365.25
g1 = ParametricPlot[{{Cos[t] +  $\sqrt{a^2 - b^2}$  + a Cos[t/m], Sin[t] + b Sin[t/m]},
  {Cos[t], Sin[t]}},
  {t, -16 Pi, 16 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

1.525

1.518

1.88085



- Graphics -

Verbesserung durch Reihenentwicklung, d.h. Berücksichtigung der Obertöne:

a1 und b1 sind die entsprechenden Korrekturkonstanten.

```

a = 1.525
a1 = 0.05
b = 1.518
b1 = 0.05
m = 686.98 / 365.25
ParametricPlot[
  {{Cos[t] +  $\sqrt{a^2 - b^2}$  + a Cos[t/m] + a1 Cos[2 t / m], Sin[t] + b Sin[t/m] + b1 Sin[2 t / m]},
   {Cos[t], Sin[t]}},
  {t, -16 Pi, 16 Pi}, AspectRatio -> Automatic]

```

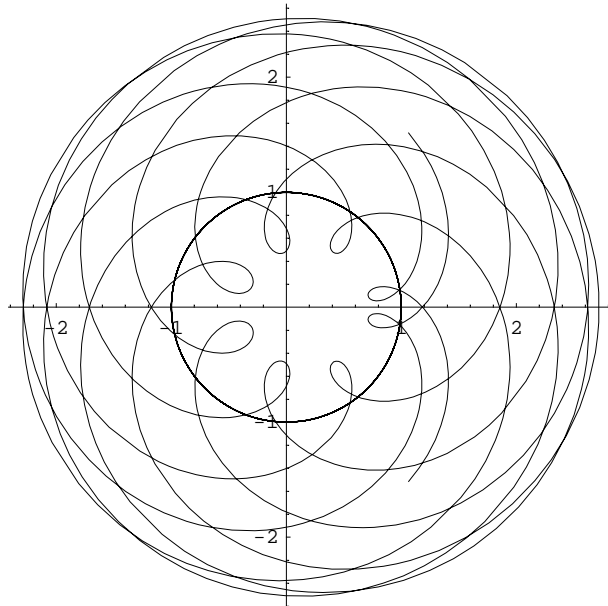
1.525

0.05

1.518

0.05

1.88085



- Graphics -

Zusätzlich wird nun der periodisch störende Einfluß anderer Planeten berücksichtigt, hier z.B. der des Jupiter mit

$$U_{\text{siderisch}} = 4332.588 \Rightarrow m_s = \frac{4332.588}{365.25}$$

ka und kb sind die entsprechenden Kopplungskonstanten:

```
a = 1.525
a1 = 0.05
b = 1.518
b1 = 0.05
m = 686.98 / 365.25
ms = 4332.588 / 365.25
ka = 0.1
kb = 0.1
ParametricPlot[{{Cos[t] +  $\sqrt{a^2 - b^2}$  + a Cos[t/m] + a1 Cos[2 t/m] + ka Cos[t/ms],
  Sin[t] + b Sin[t/m] + b1 Sin[2 t/m] + kb Sin[t/ms]},
  {Cos[t], Sin[t]}},
  {t, -16 Pi, 16 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

1.525

0.05

1.518

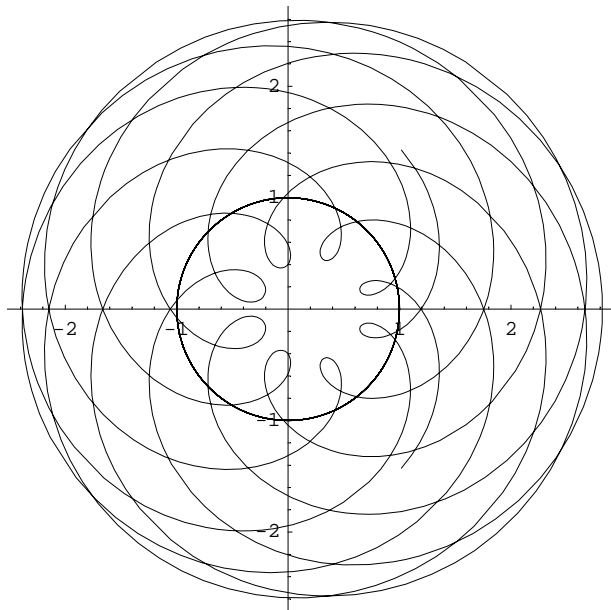
0.05

1.88085

11.862

0.1

0.1



- Graphics -

Beispiel Jupiterbahn:

Für die Jupiterbahn gilt:

große Halbachse $a = 5.203$ AE

Exzentrizität $e = 0.048 \Rightarrow b = a \sqrt{1 - e^2} = 5.197$ AE

$U_{\text{siderisch}} = 4333$ Tage

Beobachtungszeitraum 12 Jahre

$U_{\text{syn}} = 399$ ($11 \cdot 399 = 4389$; $12 \cdot 365 = 4380$), damit ergeben sich 11

Schleifen in 12 Jahren.

`a = 5.203`

`b = 5.197`

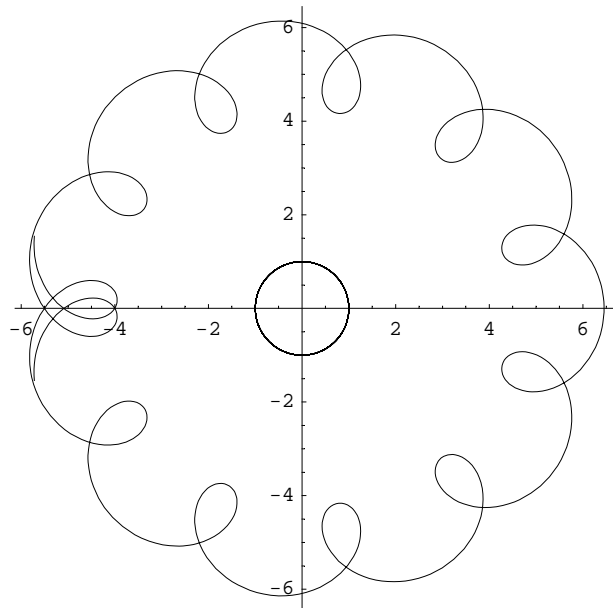
`m = 4333 / 365.25`

```
g2 = ParametricPlot[{{Cos[t] + Sqrt[a^2 - b^2] + a Cos[t/m], Sin[t] + b Sin[t/m]},
  {Cos[t], Sin[t]}},
  {t, -13 Pi, 13 Pi}, AspectRatio -> Automatic]
```

5.203

5.197

11.8631



- Graphics -

Saturnbahn:

$a = 9.529$ AE

$e = 0.054 \Rightarrow b = a \sqrt{1 - e^2} = 9.515$ AE

$U_{\text{siderisch}} = 10743$ Tage

$U_{\text{syn}} = 378$ ($28 \cdot 378 = 10584$; $29 \cdot 365 = 10585$) \Rightarrow

Beobachtungszeitraum 29 Jahre mit 29 bis 30 Schleifen

```

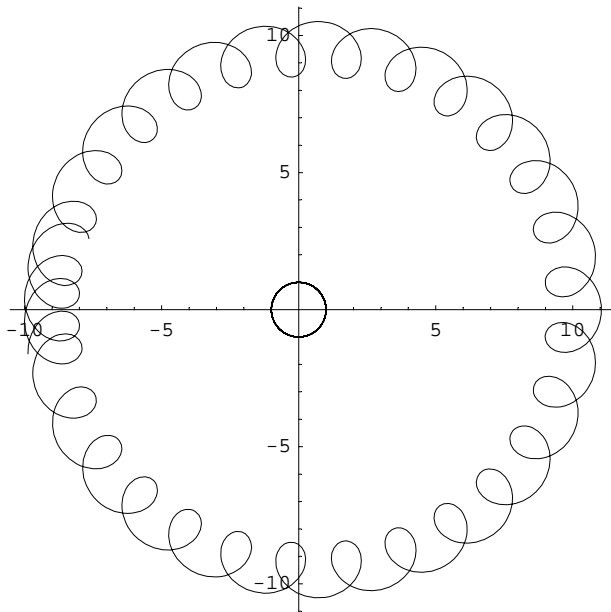
a = 9.529
b = 9.515
m = 10743 / 365.25
g3 = ParametricPlot[{{Cos[t] +  $\sqrt{a^2 - b^2}$  + a Cos[t/m], Sin[t] + b Sin[t/m]},
  {Cos[t], Sin[t]}},
  {t, -32 Pi, 31 Pi}, AspectRatio -> Automatic ]

```

9.529

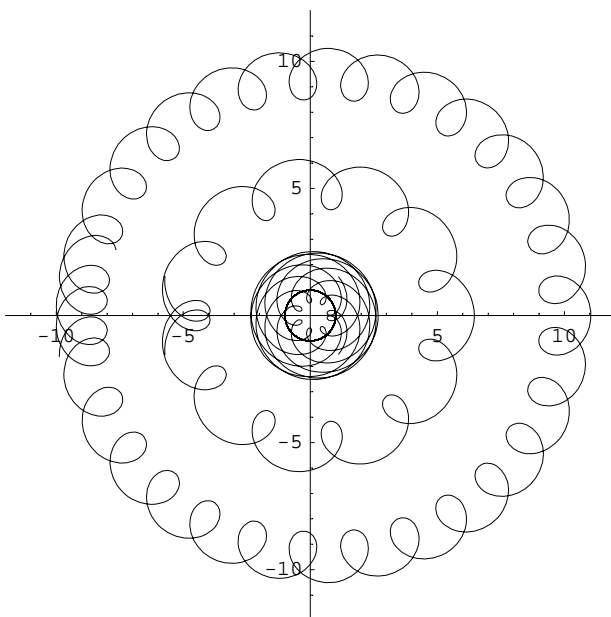
9.515

29.4127



- Graphics -

```
Show[g1, g2, g3, PlotRange -> {{-12, 12}, {-12, 12}}]
```



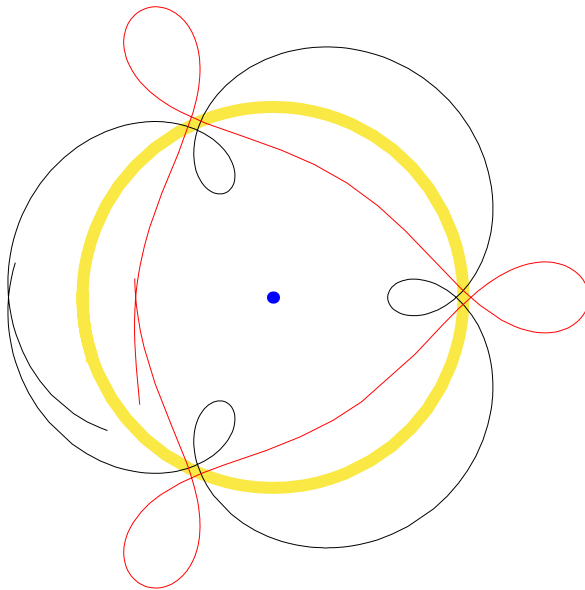
- Graphics -

Inversion der Merkurbahn an der Sonnenbahn:

```

R = 1
r = 0
a = 0.397
b = 3.15
x[t_] := (R + r) Cos[t] - a Cos[t b + t]
y[t_] := (R + r) Sin[t] - a Sin[t b + t]
Distanz[t_] :=  $\sqrt{x[t]^2 + y[t]^2}$ 
f[t_] := 1 / Distanz[t]^2
Winkel[t_] := N[ArcSin[(y[t] / Distanz[t])] 180 / Pi]
ParametricPlot[{{Cos[t], Sin[t]}, {x[t], y[t]}, {f[t] x[t], f[t] y[t]}, {0, 0}},
  {t, -Pi, 1.1 Pi}, AspectRatio -> Automatic, Axes -> None,
  PlotStyle -> {{Thickness[0.02], RGBColor[0.98, 0.91, 0.27]},
    {GrayLevel[0]}, {RGBColor[1, 0, 0]}, {Thickness[0.02], RGBColor[0, 0, 1]}}]
1
0
0.397
3.15

```



- Graphics -